Premier semestre 2020-2021
Cours de logique, ENS

Partiel en abstenciel : novembre 2020

Le sujet est à rendre au plus tard le 23 novembre 2020. C'est le même sujet que celui initialement prévu en 2 heures.

Exercice 1. (Relation d'équivalence.)

Soit $\mathcal{L}_n = \{E_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ où les E_i sont des relations binaires. On considère la $\mathcal{L}_n$-théorie $\mathcal{T}_n$ qui exprime que :

- chaque E_i est une relation d'équivalence ;
- E_0 a deux classes d'équivalence ;
- chaque E_i-classe d'équivalence est la réunion de deux E_{i+1}-classes ;
- chaque classe de E_n est infinie.

1. Écrire une axiomatisation de $\mathcal{T}_n$.
2. Pour quels cardinaux infinis $\mathcal{T}_n$ est-elle catégorique ?
3. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est complète.
4. Soient $\mathcal{L} = \bigcup \mathcal{L}_n$ et $\mathcal{T}_n = \bigcup \mathcal{T}_n$; montrer que $\mathcal{T}$ est satisfaisable et complète.
5. Combien existe-il de modèles dénombrables de $\mathcal{T}$, à isomorphisme près ?

Exercice 2. (Définissabilité, non-élémentaire équivalence.)

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales est définissable avec paramètres dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ et en déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est définissable avec paramètres dans la même structure. Montrer que les matrices diagonales ne sont pas définissables sans paramètres.

   Bonus ($\star$) **:** Montrer que les matrices diagonalisables sont définissables sans paramètre.
2. Montrer que si $m \neq n$, alors les groupes $(\mathbb{Z}^m, 0, +)$ et $(\mathbb{Z}^n, 0, +)$ ne sont pas élémentairement équivalents.

Exercice 3. (Théorie modèle compagne.)

Définition. Soit $\mathcal{T}$ une langage dans un langage $\mathcal{L}$. On appelle *théorie modèle compagne* de $\mathcal{T}$ une théorie $\mathcal{T}'$ qui vérifie :

(a) Tout modèle de $\mathcal{T}$ se plonge dans un modèle de $\mathcal{T}'$;

(b) Tout modèle de $\mathcal{T}'$ se plonge dans un modèle de $\mathcal{T}$;

(c) $\mathcal{T}'$ est modèle-complète (si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles de $\mathcal{T}'$ tels que $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$, alors $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$).

1. Déterminer une théorie modèle compagne de la théorie des ordres totaux, et une théorie modèle compagne de la théorie des corps ordonnés [1]. Une théorie modèle compagne est-elle complète ?
2. Montrer qu'une théorie $\mathcal{T}$ admet au plus une théorie modèle compagne [2].

1. On pourra admettre que RCF élimine les quantificateurs : c'est le théorème de Seidenberg-Tarski.
2. On pourra utiliser librement les unions de chaînes de Tarski de sous-structures élémentaires.

3. On dit qu'une $\mathcal{L}$-théorie $\mathcal{T}$ est inductive si toute union de chaîne de $\mathcal{L}$-structures modèles de $\mathcal{T}$ est encore un modèle de $\mathcal{T}$. Soient $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures ; on dit que $\mathcal{M}$ est existentiellement close dans $\mathcal{N}$, et on note $\mathcal{M} \leq_1 \mathcal{N}$, si pour toute formule existentielle $\varphi(x)$ et pour tout n-uplet $\overline{a} \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$$

Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, modèle d'une théorie $\mathcal{T}$, est dite existentiellement close si pour tout $\mathcal{N} \models \mathcal{T}$, $\mathcal{M} \leq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \leq_1 \mathcal{N}$. Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :

Théorème. Soit $\mathcal{T}$ une théorie inductive. Alors $\mathcal{T}$ admet une théorie modèle compagne si et seulement si les modèles de $\mathcal{T}$ existentiellement clos forment une classe élémentaire.

On rappelle qu'une classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-structures est élémentaire s'il existe une théorie $\mathcal{T}'$ telle que $\mathcal{C}$ est la classe des modèles de $\mathcal{T}'$.

a) Soit $\mathcal{M}$ un modèle d'une théorie modèle complète. Soit $\mathbb{S}$ une sous-structure de $\mathcal{M}$. Montrer que $\mathbb{S}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$ si et seulement si $\mathbb{S}$ est existentiellement close dans $\mathcal{M}$.

b) Soient $\mathcal{M}_1 \leq \mathcal{M}_2 \leq \mathcal{M}_3$ tel que $\mathcal{M}_1$ est existentiellement close dans $\mathcal{M}_3$. Montrer que $\mathcal{M}_1$ est existentiellement close dans $\mathcal{M}_2$.

c) Montrer le théorème.

Problème. (Nouveaux quantificateurs.) Soit $\mathcal{L}$ un langage. On ajoute à la logique élémentaire un nouveau quantificateur Q liant une variable dans une formule :

Définition. Soit Q un nouveau symbole logique, on définit les formules de $\mathcal{L}(Q)$ par récurrence par :

- $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule, où R est un symbole de relation de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes ;
- si ψ_1, ψ_2 sont des formules, $\neg\psi_1$ est une formule, $\psi_1 \star \psi_2$ est une formule pour $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, et $\exists x\ \psi_1$ et $\forall x\ \psi_1$ sont des formules ;
- pour toute variable x, $Qx\ \psi$ est une formule.

On notera $\models_Q$ la satisfaction des formules de $\mathcal{L}(Q)$ par des $\mathcal{L}$-structure définie par récurrence sur les formules, de la manière habituelle pour les symboles usuels, à laquelle on rajoute la définition de $\mathcal{M} \models_Q Qx\ \psi$ pour une formule ψ de $\mathcal{L}(Q)$.

Pour commencer, on considère $\mathcal{L}(\exists_f)$, et pour une formule ψ de $\mathcal{L}(\exists_f)$, on dit qu'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ satisfait $\exists_f x\ \psi$ si l'ensemble $\{m \in \mathcal{M} \colon \mathcal{M} \models_{\exists_f} \psi(m)\}$ est fini et **non vide**.

1. Montrer qu'il existe des ensembles de formules de $\mathcal{L}(\exists_f)$ finiment satisfaisables qui ne sont pas satisfaisables : dans le langage vide, on pourra prendre la théorie des ensembles infinis formulée avec les formules classique du 1er ordre et une axiomatisation dans $\mathcal{L}(\exists_f)$ de la classe des ensembles finis.

2. (Théorème de Löwenheim-Skolem.) Supposons $\mathcal{L}$ dénombrable. Pour toute $\mathcal{L}$-structure infinie $\mathcal{M}$, montrer qu'il existe une sous-structure élémentaire dénombrable $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, telle pour toute formule de $\mathcal{L}(\exists_f)$ ψ à paramètres dans $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{M} \models_{\exists_f} \psi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models_{\exists_f} \psi$$

On parlera de sous-structure élémentaire au sens de $\mathcal{L}(\exists_f)$.

On considère maintenant $\mathcal{L}(\exists_{\geq \aleph_1})$, et pour une formule ψ de $\mathcal{L}(\exists_{\geq \aleph_1})$, on dit qu'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ satisfait $\exists_{\geq \aleph_1} x\ \psi$ s'il existe un nombre infini non dénombrable de $m \in \mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M} \models_{\exists_{\geq \aleph_1}} \psi(m)$.

3. Pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, on note $\mathrm{Th}_{\exists_{\geq \aleph_1}}(\mathcal{M}) = \{\psi \in \mathcal{L}(\exists_{\geq \aleph_1}) \colon \mathcal{M} \models_{\exists_{\geq \aleph_1}} \psi\}$. Soit $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-structure dénombrable, montrer que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models_{\exists_{\geq \aleph_1}} \mathrm{Th}_{\exists_{\geq \aleph_1}}(\mathcal{N})$ alors $\mathcal{M}$ est dénombrable. En déduire que le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant n'est pas valable dans $\mathcal{L}(\exists_{\geq \aleph_1})$.

4. (Compacité.) Supposons $\mathcal{L}$ de cardinal au plus $\aleph_1$. Le but de cette question est de montrer que si $\mathcal{T}$ est une $\mathcal{L}(\exists_{\geq\aleph_1})$-théorie (un ensemble de formules de $\mathcal{L}(\exists_{\geq\aleph_1})$), $\mathcal{T}$ est satisfaisable si et seulement si $\mathcal{T}$ est finiment satisfaisable. Pour cela, nous utiliserons la compacité de la logique du premier ordre. Afin de s'y ramener, on construit par récurrence sur les $\mathcal{L}(\exists_{\geq\aleph_1})$-formules une transformation de φ en $\mathcal{L}^*$-formules qui ne contiennent pas le quantificateur $\exists_{\geq\aleph_1}$.

   a) (Théorème de Löwenheim-Skolem descendant.) Montrer que si $\mathcal{T}$ admet un modèle de cardinalité infinie non dénombrable, alors tout modèle de $\mathcal{T}$ admet une sous-structure élémentaire de cardinal $\aleph_1$ au sens de $\mathcal{L}(\exists_{\geq\aleph_1})$.

      Indication : On pourra ajouter plusieurs fonctions de Skolem pour les formules quantifiées par $\exists_{\geq\aleph_1}$.

   b) On ajoute au langage un prédicat unaire U et un prédicat 3-aire F. Écrire un énoncé qui dit que pour tout élément u fixé, $F(u,\cdot,\cdot)$ est le graphe d'une fonction.

      Soit φ une formule de la forme $\varphi = \exists_{\geq\aleph_1} x\ \psi$. Construire par récurrence φ^* formule élémentaire du 1er ordre dans le langage $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{U, F\}$ disant qu'il existe u tel que le domaine de la structure est l'image par la fonction $F(u,\cdot,\cdot)$ de l'ensemble Z des éléments qui satisfont ψ^*.

   c) Montrer que pour tout énoncé $\exists_{\geq\aleph_1} x\ \psi$, on peut construire une $\mathcal{L}^*$-formule A_ψ signifiant qu'il existe u tel que la fonction $F(u,\cdot,\cdot)$ injecte le domaine de la structure dans l'ensemble Z défini précédement ou qu'il existe u' tel que la fonction $F(u',\cdot,\cdot)$ envoie Z dans un sous-ensemble de l'ensemble défini par le prédicat U.

   d) Construire une théorie $\mathcal{T}^*$ dans le langage $\mathcal{L}^*$, telle que pour toute $\mathcal{L}(\exists_{\geq\aleph_1})$-structure $\mathcal{M}$ de cardinal $\aleph_1$, $\mathcal{M} \models_{\exists_{\geq\aleph_1}} \mathcal{T}$ si et seulement s'il existe une interprétation des symboles U et F dans $\mathcal{M}$ telle que $(\mathcal{M}; X, Y) \models \mathcal{T}^* \cup \{\neg\exists_{\geq\aleph_1} x U(x)\}$.

      Indication : Il faut voir $X = \mathcal{U}^{\mathcal{M}}$ comme un ensemble d'éléments qui satisfont les formules ψ de $\mathcal{T}$ tel que $Z^{\mathcal{M}}$ est au plus dénombrable, et voir que si $\mathcal{M} \models \exists_{\geq\aleph_1} x\ \psi$, le domaine de $\mathcal{M}$ et l'ensemble $Z^{\mathcal{M}}$ sont en bijection.

   e) Démontrer la compacité de la logique $\mathcal{L}(\exists_{\geq\aleph_1})$.